



රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07

13 ශ්‍රේණිය - උපකාරක පරීක්ෂණය - 2021 දෙසැම්බර්

සංයුක්ත ගණිතය I

කාලය : පැය 2

A කොටස

ප්‍රශ්න සියල්ලටම පිළිතුරු සපයන්න.

01. සියළු n සඳහා $1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ බව ගණිත අනුප්පාත මූලධර්මය මගින් සාධනය කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

02. $y = 2|x-1|$ හා $y = |x+1|$ යන ශ්‍රිතවල ප්‍රස්ථාර එකම බණ්ඩාංක තලයක ඇඳ, ඒවායින් $2|x-1| > |x+1|$ හි විසඳුම් සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

03. $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ නම් $\sqrt{2}|z-1|$ හි අවම අගය 1 බව පෙන්වන්න.

04. $(a-b)^r$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ $n \geq 5$ වන විට, 5 වන හා 6 වන පද වල එකතුව ශුන්‍යය වේ නම් $\frac{a}{b} = \frac{n-4}{5}$ බව පෙන්වන්න.

09. $S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8$ යැයි ගනිමු. $S = 0$ වෘත්තය මත (t, t) ආකාරවන බිණ්ඩාංක යුගලක් තිබිය හැකි බව පෙන්වා t අගයන්න. මෙහි t යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි. තවදුරටත්, ඉහත (t, t) බිණ්ඩාංක යුගල හරහා ගමන් කරනු ලබන **තුඩාම වෘත්තය** සොයන්න.

10. $\tan \theta = \frac{x \sin \phi}{1 - x \cos \phi}$ සහ $\tan \phi = \frac{y \sin \theta}{1 - y \cos \theta}$ නම් $x \sin \phi = y \sin \theta$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-n^2} + \frac{2}{1-n^2} + \dots + \frac{n}{1-n^2} \right) = -\frac{1}{2} \text{ බව සාධනය කරන්න.}$$

$y = \cos x$ වක්‍රයත්, x අක්ෂයත්, y අක්ෂයත් හා $x = \frac{\pi}{6}$ සරල රේඛාවක් මගින් ආවෘත වර්ගඵලය x අක්ෂය වටා 2π භ්‍රමණයෙන් ලැබෙන සහ වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.

07. $y = x^4 - 4x^2$ ශ්‍රිතයේ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය වල x බිත්තියාංක සොයා $x = \pm 2$ දී නිවැරදි ලක්ෂණ ඇති බව පෙන්වන්න. නිවැරදි ලක්ෂ්‍යයක දී ව්‍යුත්පන්නය ශුන්‍යයවීම අත්‍යවශ්‍ය නොවන බව පෙන්වීමට රූපසටහනක් භාවිතා කරන්න.

08. $4x+2y-9=0$ හා $2x+y+6=0$ සරල රේඛා O මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවක් මඟින් පිළිවෙලින් P හා Q ලක්ෂ්‍ය වල දී ඡේදනය කරයි. $OP:OQ=3:4$ බව පෙන්වන්න.

ප්‍රශ්න තුනකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11.a. $a \neq 0$ හා $a, b, c \in \mathbb{R}$ වී $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල α සහ β නම්, මූල වෙනසට හෝ මූල ගුණිතය සඳහා ප්‍රකාශන ලබාගන්න. $x^2 + ax + 1 = 0$ සහ $x^2 - x - a = 0$ සමීකරණ දෙකට මොහොම මූලයක් පැවතීම සඳහා වන a හි අගය සොයන්න. a හි මෙම අගය සඳහා වර්ගය සමීකරණ දෙකේ ඉතිරි මූල මගින් සැපිරෙන වර්ගය සමීකරණය සොයන්න.

b. $f(x) = 8x^3 + 12x^2 + px + 1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ බහුපදය $(x+1)$ න් බෙදවීමේ ශේෂය -1 වේ. $(x+k)^2$ ආකාරයේ සාධකයක් බහුපද ශ්‍රිතයට ඇත්නම්, $f(x)$ හි සාධක සියල්ලම සොයන්න. මෙහි $p, k \in \mathbb{R}$ වේ.

c. $x^2 + x + 1 = t$ ලෙස ගැනීමෙන් $\frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 1)}$ හි හිස්ත භාග x මගින් ප්‍රකාශ කරන්න.

12.a. එක්තරා පන්තියක පිරිමි ළමුන් 4ක් හා ගැහැණු ළමුන් g ප්‍රමාණයක් සිටී. සෑම ඉරිදා දිනකම සිසුන් 5 දෙනෙකුගෙන් යුත් එකිනෙකට වෙනස් කණ්ඩායමක් බැගින් විෂය සම්ගාමී චාරිකාපාලක යොදවයි. එක් කණ්ඩායමකට අඩු ම තරමේ පිරිමි ළමුන් 3 දෙනෙකුත් සහභාගී කරවයි. එලෙස තෝරාගත් සෑම කණ්ඩායමකම එක් ගැහැණු ළමයෙකුට එක් බෝනික්කෙකු බැගින් ලබාදෙයි. එලෙස ලබාදුන් මුළු බෝනික්කන් ගණන 85ක් නම් g සොයන්න.

b. $\frac{5}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{8}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{11}{3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය U_r ලියන්න. $U_r = f(r) + 7f(r+2) - f(r+2) - 7f(r+3)$ වන ලෙස $f(r)$ හි ශ්‍රිතයක් සොයන්න. $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n U_r$ ලබාගන්න. එහෙයින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඵලය සොයන්න.

13.a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ නම් $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 50 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වා ප්‍රතිලෝම න්‍යාසයේ අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් A^{100} හි ප්‍රතිලෝම න්‍යාසය ලබාගන්න.

b. i. $k > 0, |z| = k$ සහ $w = \frac{z-k}{z+k}$ වේ. $\bar{w}$ සොයා $\text{Re}(w) = 0$ බව පෙන්වන්න.

ii. z_1, z_2 හා z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් නිරූපණය කරන විට $z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ වේ. $|z|$ හා $|z-1|$ සොයන්න. එහෙයින්, z_1, z_2 හා z_3 නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය මගින් සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

iii. $|z - 25i| \leq 15$ නම්, $\left| \underset{\text{ලපරිම}}{\text{Arg}(z)} - \underset{\text{අවම}}{\text{Arg}(z)} \right| = 2 \cos^{-1} \frac{4}{5}$ බව පෙන්වන්න.

14.a. $f(x) = \frac{3x^2 + 12x + 13}{6(x+1)^4}$; $x = -1$ යැයි ගනිමු. $f''(x) = \frac{(x+3)(x+5)}{(x+1)^5}$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශකේන්ද්‍රය ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යය හා නිශ්චරිත පැහැදිලිව දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්ථාරය අනුරේඛණය කරන්න.

b. දී ඇති සාප්තෝණී ත්‍රිකෝණයක කර්ණ පාදය නියත ඒකක a දිගකින් යුක්ත වෙයි. ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය (P) උපරිම වන විට ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද බව පෙන්වන්න. තවදුරටත් උපරිම පරිමිතියක් ඇති ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\frac{a^2}{4}$ බව ද පෙන්වන්න.

15.a. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිත කරමින්, $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx$ සොයන්න.

b. $\int_0^p f(p-x)dx = \int_0^p f(x)dx$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $f(x)$ යනු $(0, p)$ ප්‍රාන්තරය තුළ සන්තතික

ත්‍රිකෝණයකි. $I = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{(a-x)^n + x^n} dx$ සහ $J = \int_0^a \frac{x^n}{x^n + (a-x)^n} dx$ යැයි ගනිමු.

$I = J$ බව සාධනය කරන්න.

I සහ J අතර තවත් සම්බන්ධයක් ලබාගෙන, I අගයන්න.

c. $\int_{-2}^{-1} (x+2)^3 (x+5) dx$ අගයන්න.

16. PQR යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. එහි අන්තර් වෘත්තයේ අරය ඒකක 1 ක් වේ. වෘත්තය PQ, QR හා RP පාද පිළිවෙලින් D, E හා F ලක්ෂ්‍ය වලදී ස්පර්ශ කරයි. PQ පාදයේ සමීකරණය $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ හා $D = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ වේ. මූල ලක්ෂ්‍යයන්, වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයත් PQ රේඛාවේ එකම පැත්තේ පිහිටයි.

i. වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

ii. E හා F ලක්ෂ්‍ය පල බන්ධාංක සොයන්න.

iii. QR හා RP රේඛාවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $y = \sqrt{3}x$ හා $y = 0$ බව පෙන්වන්න.

17.a.i. $(\sec A \sec B + \tan A \tan B)^2 - (\sec A \tan B + \tan A \sec B)^2 \equiv 1$ බව පෙන්වන්න.

ii. $32 \tan^8 \theta = 2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha$ සහ $3 \cos 2\theta = 1$ නම්, α සඳහා සාධාරණ විසඳුම් ලියා දක්වන්න.

$f(x) = 4(\sin^4 x + \cos^4 x)$ නම්, $f(x) = 3 + \cos 4x$ බව සාධනය කරන්න. ඒනසින් ගත් අන් අයුරකින් $f(x) = 4(\sin^4 x + \cos^4 x)$ හි දළ ප්‍රස්ථාරය $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ ප්‍රාන්තරය තුළ අඳින්න.

b. ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\sin$ නීතිය ලියා දක්වන්න.
 $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$ බව සාධනය කරන්න.

c. $\cos^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) = \frac{2\pi}{3}$ විසඳන්න.